Ueber eine Parameterdarstellung der Raumcurve 4. Ordnung (erste Art) und das auf dieselbe bezügliche Integral.

Inaugural-Dissertation

welche mit Genehmigung

der

Philosophischen Fakultät der Königl. Universität Breslau

zur Erlangung der Doctorwürde

Dienstag, den 10. October 1876, Vormittags 12 Uhr

öffentlich vertheidigen wird

Gustav Westphal

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

gegen die Herren Opponenten:

E. Toeplitz und **A. Bochert**
Dd. phil. cand. math.

Breslau.
F. W. Jungfer's Buchdruckerei.
1876.

HERRN

Professor Dr. Rosanes

in innigster Verehrung und Dankbarkeit

gewidmet

vom Verfasser.

H. Aronhold hat in einer kurzen Abhandlung (Monatsberichte der Berl. Acad. d. W., Sitzung vom 25. April 1861) die Coordinaten eines auf einer ebenen Curve 3. Ordnung gelegenen Punctes in sehr eleganter Weise als explicite Functionen eines Parameters λ und der Covarianten und Invarianten der betreffenden Curve 3. Ordnung ausgedrückt, und diese Darstellung mit der Integration des auf die Curve bezüglichen elliptischen Differentiales in Verbindung gebracht. Diese «Aronhold'sche Darstellung» ist, zum Theil von etwas anderen Gesichtspuncten aus, nochmals abgeleitet worden von den H. Clebsch und Gordan[1]) und H. Gundelfinger[2]), aber es scheint bisher kein weiteres Beispiel für die explicite Darstellung der Puncte einer Curve vom Geschlechte $p=1$ bekannt geworden zu sein. Dass die Coordinaten einer solchen Curve, wenn sie eben ist, stets die Form von rationalen Functionen eines Parameters λ und einer Quadratwurzel aus einem in λ biquadratischen Ausdrucke haben müssen, hat Clebsch[3]) bewiesen; ein Gleiches lässt sich für Raumcurven vom Geschlechte $p=1$ unschwer darthun; etwas anderes jedoch ist es, wenn diesen Coordinatenausdrücken (wie bei H. Aronhold) die definitive Form gegeben werden soll, welche die moderne Algebra von ihnen fordert.

Ich werde in Folgendem für die Puncte der Normalcurve der Raumcurven vom Geschlechte $= 1$, nämlich der

---

[1]) Mathem. Annalen Bd. I. pag. 87.

[2]) Annali di Math. v. Brioschi u. Cremona Ser. II. 5 pag. 235.

[3]) Crelle 63.

Raumcurve 4. Ordnung (1. Art) eine explicite Parameterdarstellung im Sinne der Invariantentheorie liefern. Die hierbei sich ergebenden Ausdrücke sind sehr einfach und zugleich den von H. Aronhold im analogen Falle[1]) aufgestellten ungemein ähnlich. Die Herleitung gelingt in einfachster Weise durch eine zwischen den Covarianten 2er Formen 2. Grades mit 4 Variabeln bestehende Identität (analog der bei ternären cubischen Formen von H. Salmon aufgestellten), welche eine Reihe für die geometrische und algebraische Theorie der Raumcurve 4. Ordnung wichtiger Thatsachen, unter andern auch die Darstellung der Verbindungslinie 2er Curvenpuncte als Schnitt 2er covarianten Ebenen[2]) umfasst (§ 2); nachdem hieraus (§ 3) die Parameterdarstellung hergeleitet worden, wird für das auf die Raumcurve bezügliche (elliptische) Differential eine directe Integrationsmethode gewonnen und die Beziehung desselben zu den eigenthümlichen Elementen der Curve studirt (§ 4), wodurch der Kreis der (nach Clebsch)[3]) vermöge des Abel'schen Theorems zu erledigenden Probleme für diesen speciellen Fall etwas erweitert wird. Als Beispiel dient die vollständige Erledigung eines Problems im Raume, welches dem Problem der einem Kegelschnitt einbeschriebenen, einem anderen umschriebenen Polygone entspricht; die bezüglichen Sätze sind ohne den leicht zu liefernden Beweis aufgestellt. Die ganze folgende Abhandlung ist eine kürzere Fassung eines noch zu veröffentlichenden längeren Aufsatzes über denselben Gegenstand.

§ 1.

Bezeichnungen.

Die im Folgenden zu gebrauchenden Bezeichnungen, die sich auf das simultane System 2er quaternären Formen 2. Grades beziehen, stelle ich des leichteren Verständnisses wegen noch

---

[1]) l. c.

[2]) Analog der bekannten Darstellung des Tangentialpunctes bei ebenen Curven 3. Ordnung, deren sich auch H. Aronhold bedient.

[3]) Vgl. Clebsch Crelle 64 Ueber die Anwendung der Abl. Fkt. i. d. G.

kurz zusammen. Sie weichen in einigen Puncten von den von Salmon (Analyt. Geom. d. R. Bd. II. p. 593) gewählten ab.

Es seien $f(x) = a_x^2 = b_x^2 = \ldots = \Sigma a_{i\varkappa} x_i x_\varkappa$

$$F(x) = A_x^2 = B_x^2 = \ldots = \Sigma A_{i\varkappa} x_i x_\varkappa$$

die beiden Formen (Flächen) 2. Ordnung, welche sich, wie überhaupt alle Flächen des Büschels $\varkappa f + \lambda F = 0$, in der später zu betrachtenden Raumcurve [$cf = o$ $F = o$] schneiden.

Die Formen (Covarianten, Contravarianten), zu denen dieselben Veranlassung geben, bezeichne ich wie folgt:

1) Die zugehörigen Formen (Contravarianten):

$$\varphi(u) = (uabc)^2 = u_\alpha^2 = u_\beta^2 = \ldots = \Sigma a_{i\varkappa} u_i u_\varkappa$$

$$\Phi(u) = (uABC)^2 = u_A^2 = u_B^2 = \ldots = \Sigma A_{i\varkappa} u_i u_\varkappa$$

$$\Sigma(u) = (uABc)^2 = u_\Sigma^2 = u_{\Sigma_1}^2 = \ldots = \Sigma_{i\varkappa} u_i u_\varkappa$$

$$\sigma(u) = (uabC)^2 = u_\sigma^2 = u_{\sigma_1}^2 = \ldots = \Sigma \sigma_{i\varkappa} u_i u_\varkappa$$

2) Die Covarianten 2. Grades.

Als fundamentale Covarianten führe ich zu Gunsten der späteren Entwicklungen ein

$$R(x) = (Aabc)(Babc) A_x B_x = A_\alpha B_\alpha A_x B_x = R_x^2$$

$$Q(x) = (aABC)(bABC) a_x b_x = a_A b_A a_x b_x = Q_x^2$$

3) Die simultanen Invarianten sind definirt als Entwicklungscoefficienten, wenn man die Form $(abcd)^2 = \Delta_f$ für $\varkappa f + \lambda F$ bildet, und dann mit $\Delta(\varkappa, \lambda)$ bezeichnet. Man hat dann

$$\Delta(\varkappa_1 \lambda = \varkappa^4 \Delta_f + 4\varkappa^3 \lambda \Theta + 6\varkappa^2 \lambda^2 H + 4\varkappa \lambda^3 \Theta_1 + \lambda^4 \Delta_F$$

und

$$\Theta = A_\alpha^2, \; \Theta_1 = A_A^2, \; H = a_\Sigma^2 = A_\sigma^2, \; \Delta_f = a_\alpha^2, \; \Delta_F = {}^2_A$$

4) Die Combinanten 4. Grades und 4. Klasse

$T_x^4 = (aARQ) a_x A_x R_x Q_x$ und $u_T^4 = (\alpha A \Sigma \sigma) u_\alpha u_A u_\Sigma u_\sigma$

(bekanntlich zerfallende Formen und von ungradem Charakter).

5) Die Formen mit 2 Reihen Ebencoordinaten (Complexe)

$$M = (abuv)^2,\quad N = (aAuv)^2,\quad P = (ABuv)^2$$

$$M = (\alpha\beta xy)^2\quad N = (\alpha Axy)^2\quad \Pi = (ABxy)^2$$

und $(aAbB)(abuv)(ABuv) = \Gamma$ (Combinante und von ungradem Charakter).

Die hier aufgeführten Formen bilden keineswegs das vollständige System der Formen, zu denen f(x), F(x) Veranlassung geben, nur die sub 1 bis 4 angeführen Covarianten, Invarianten und Contravarianten bilden in sich ein vollständiges System; von den übrigen sind nur diejenigen, die im Folgenden besonders gebraucht werden, mit einer besonderen Bezeichnung versehen.

§ 2.

Ueber eine bemerkenswerthe identische Relation zwischen den Covarianten von f(x) und F(x). Consequenzen derselben und Anwendungen auf die geometrische Theorie der Raumcurve 4. Ordnung; insbesondere Darstellung der Raumcurvensehne als Schnitt 2er covarianten Ebenen.

Die elegante Behandlung des auf eine Curve 3. Ordnung bezüglichen Differentiales durch H. Aronhold fusst im Wesentlichen darauf, dass H. Aronhold den Curvenpunct als Schnitt 2er covarianten Graden[1]) (als Tangentialpunct eines anderen Punctes) auffasst, wodurch die Integration des Differentiales sowol als auch die Parameterdarstellung der Curve in ungemein eleganter Weise sich gestaltet. Bei dem Versuche, für die Raumcurve 4. Ordnung ein ähnliches Resultat zu gewinnen und sodann für die Parameterdarstellung zu verwerthen, kommt man auf eine identische Relation, welche sich in ihren Consequenzen als fruchtbar beweist, und deshalb vorausgeschickt werden mag.

---

[1]) Bekanntlich ist für α_x^3 als die Grundform, a_x^3 als ihre Hessesche, der Tangentialpunct von y der Schnitt von $a_y^2 a_x = 0$ $\alpha_y^2 \alpha_x = 0$, was unmittelbar aus $(a\alpha u)^3 \equiv 0$ resultirt.

Bilden wir zu diesem Zwecke die Formen

$$(ARuv)^2 \text{ und } (aQuv)^2$$

worin R und Q die Symbole der sub 2 § 1 definirten Covarianten sind.

Nun ergiebt sich zunächst

$$(ARuv)^2 = A_\alpha B_\alpha \, (ACuv)(BCuv)$$

und nach Anwendung des Productsatzes mit Leichtigkeit

$$(ARuv)^2 = \frac{1}{2}\Theta(ABuv)^2 - \frac{1}{6}(\alpha Axy)^2 = \frac{1}{2}\Theta P - \frac{1}{6}N \quad a)$$

und hieraus durch Vertauschung von f mit F, R mit Q

$$(aQuv)^2 = \frac{1}{2}\Theta M - \frac{1}{6}N \quad b)$$

Aus diesen Formeln kann man, wenn man will, auch noch Formeln für $(aRuv)^2$ und $(AQuv)^2$ herleiten, indem man auf a) den Process $\Sigma a_{i\varkappa} \frac{d}{dA_{i\varkappa}}$, auf b) den Process $\Sigma A_{i\varkappa} \frac{d}{da_{i\varkappa}}$ anwendet und berücksichtigt, dass der erste Process, auf R angewendet, $\frac{1}{2}F\Delta_f$, und der 2., auf Q angewendet, $\frac{1}{2}f\Delta_F$ giebt, dann erhält man

$$(aRuv)^2 = \Theta N - \frac{1}{2}(\alpha\Sigma xy)^2$$
$$(AQuv)^2 = \Theta_1 N - \frac{1}{2}(A\sigma xy)^2 \quad c)$$

Die Identität, welche wir beweisen wollen, entspringt aus a) u. b), wenn wir diese Gleichungen von einander subtrahiren, wodurch man erhält

$$(ARuv)^2 - \frac{\Theta}{2}P = (aQuv)^2 - \frac{\Theta_1}{2}M \quad d)$$

Führt man nun statt der sich symbolisch allerdings zunächst darbietenden Formen R und Q 2 combinirte Covarianten H u. I ein, derart, dass

$$H(x) = R(\dot{x}) - \frac{\Theta}{2}F(x) \text{ und } I(x) = Q(x) - \frac{\Theta_1}{2}f(x) \quad e)$$

so verschwinden aus der Relation d) die Invarianten und es kommt einfach

$$(AHuv)^2 \equiv (aIuv)^2 \equiv -\frac{1}{6}(\alpha Axy)^2 \quad f)$$

Diese Formel bildet die Grundlage für die folgenden Ent-

wicklungen, sie spricht gewissermassen eine charakteristische Eigenschaft des Formensystems der Grundformen f und F aus; die nämlich, dass sich stets 2 Covarianten 2. Grades so finden lassen, dass die Form $(AHuv)^2$ identisch gleich ist der aus ihr durch Vertauschung von f mit F entstandenen Form $(aIuv)^2$ [1]). Ferner fällt der Vergleich mit der in der Theorie der Curven 3. Ordnung wichtigen Identität (Salmonschen Identität) $(a\alpha u)^3 \equiv o$ in die Augen, sobald wir unsere Identität in der Form $(AHuv)^2 - (aIuv)^2 \equiv o$ schreiben.

Diese Eigenschaft und der Umstand, dass die Polaren grade der Formen H und I es sind, welche bei der algebraischen Darstellung covarianter Elemente der Raumcurve 4. Ordnung [f = o F = o] auftreten, sich von den hier eingeführten Formen eine bevorzugte Stellung und berechtigen zur Einführung einer besondern Bezeichnung.

Die Formen H und I sind übrigens keine Combinanten, dagegen sind die Bildungen bemerkenswerth, welche man erhält, sobald in H für f $f + \lambda F$ gesetzt wird, und in I für F $F + \lambda f$; man hat dann

$$H_{f+\lambda F,\, F} = H + \lambda I - \frac{\lambda}{2}(\Theta_1 + \frac{\lambda}{2}\Delta_F)(f + \lambda F)$$

$$I_{f,\, F+\lambda f} = I + \lambda H - \frac{\lambda}{2}(\Theta + \frac{\lambda}{2}\Delta_f)(F + \lambda f);$$

Formeln, denen wir später eine geometrische Bedeutung abgewinnen werden.

Weiter aber folgt aus f), indem man $(uv)_{ik} = (xy)_{lm}$ setzt,

$$\left.\begin{matrix} F(x)H(y) + F(y)H(x) \\ - f(x)I(y) - f(y)I(x) \end{matrix}\right\} = 2\left\{F(x,y)H(x,y) - f(x,y)I(x,y)\right\} \quad g)$$

worin $f(x,y) = \frac{1}{2}\Sigma y_i \frac{df}{dx_i}$ ect. bedeutet. In dieser Form werden wir die Identität vorzugsweise gebrauchen.

---

[1]) Diese Eigenschaft charakterisirt H = o, I = o geometrisch; denn aus $(AHuv)^2 = (aIuv)^2 = \frac{1}{6}(\alpha Azy)^2$ folgt, dass der Complex der f und I harmonisch schneidenden Graden, der analoge Complex für F u. H und der Complex der Graden, von denen aus harmonisch gelegene Tangentenebenenpaare an f und F gehen, alle drei mit einander coincidiren.

Ich gehe nun dazu über, einige Anwendungen der Identität g) zu entwickeln, welche die Bedeutung der Formen H und I illustriren und, obgleich die Hauptanwendung auf die Parameterdarstellung erst im nächsten Paragraphen kommt, doch vielleicht das Interesse in Anspruch nehmen dürften.

Im Folgenden werden häufig Puncte der Curve $f = o$ $F = o$ gebraucht. Für einen solchen Punct ist H mit R, I mit Q vertauschbar; nicht ebenso die Polaren von H und I; dieses letzteren Umstandes wegen behalte ich mit Consequenz H und I bei, auch da, wo statt ihrer R und Q gesetzt werden könnten.

Für y als einen Punct der Raumcurve 4. Ordnung ist bekanntlich durch $\varkappa f(x,y) + \lambda F(x,y) = o$ eine beliebige Tangentialebene der Raumcurve in y repräsentirt, und wenn wir $\varkappa : \lambda$ variiren lassen, so wird das Büschel Tangentialebenen ausser dem Puncte y die Raumcurve in variablen Punctepaaren treffen, deren analytischer Ausdruck festgestellt werden kann, indem man die Gleichung der 4 Schnittpunkte von $\varkappa f(x,y) + \lambda F(x,y) = o$ mit $f = o$ $F = o$ aufstellt und den Factor $u_y^2 = o$ ablöst. Im Folgenden soll jedoch nicht die Gleichung des Punctepaares, sondern vielmehr die Gleichung der Verbindungslinie seiner Bestandtheile aufgestellt werden, ein Problem, dessen Lösung zugleich die analytische Darstellung einer Raumcurvensehne in sich fasst.

Es folgt nämlich aus g), welches man

$$\left.\begin{matrix} F(x)H(y) + F(y)H(x) \\ - f(x)I(y) - f(y)I(x) \end{matrix}\right\} = \frac{2}{\varkappa}\left\{\begin{matrix} F(x,y)(\varkappa H(x,y) + \lambda I(x,y) \\ - (\varkappa f(x,y) + \lambda F(x,y)\, I(xy) \end{matrix}\right\}$$

schreiben kann, dass für die Schnittpuncte von
$\varkappa f(x,y) + \lambda F(x,y) = o$ $f(x) = o$ $F(x) = o$ $f(y) = o$ $F(y) = o$
auch $F(x,y)(\varkappa H(x,y) + \lambda I(x,y) = o$ ist, und da der Factor $F(x,y) = o$ den Punct y liefert, so wird durch die übrigbleibenden Puncte $\varkappa H(x,y) + \lambda I(x,y) = o$ hindurchgehen, also:

I. Legt man durch die Tangente der Raumcurve im Puncte y die Tangentialebene $\varkappa f(x,y) + \lambda F(x,y) = o$, so geht durch diejenigen Schnittpuncte derselben die mit $\varkappa : \lambda$ variiren, stets die Ebene

$$\varkappa H(x,y) + \lambda I(x,y) = o.$$ Oder auch:

Jede Sehne der Raumcurve 4. Ordnung kann als Schnitt 2er covarianter Ebenen aufgefasst werden; sobald nämlich der Berührungspunkt einer die Sehne schneidenden Raumcurventangente, etwa y, bekannt ist, wird die Sehne durch

$$\varkappa f(x,y) + \lambda F(x,y) = 0,\ \varkappa H(x,y) + \lambda I(x,y) = 0$$

dargestellt, wo $\varkappa : \lambda$ der Parameter derjenigen Fläche $\varkappa f + \lambda F = 0$ ist, welche durch die Sehne und Tangente verbindende Ebene in y berührt wird. (Der letztgenannte Berührungspunkt y sowie der Parameter $\varkappa : \lambda$ werden also als bekannt angenommen, und wir werden später zeigen, wie dieselben algebraisch bestimmt werden, wenn umgekehrt die Sehne als Verbindungslinie 2er Curvenpuncte x_i und x_i^1 gegeben ist). Bemerken wir, dasss die in I. durch

$$\varkappa f(x,y) + \lambda F(x,y) = 0,\ \varkappa H(x,y) + \lambda I(x,y) = 0$$

bestimmte Sehne mit veränderlichem $\varkappa : \lambda$ eine Fläche des Büschels beschreibt, diejenige nämlich, welche die Tangente in y enthält, so entsteht die Frage, wie die andere Sehnenschaar, welche auf dieser Fläche liegt, analytisch repräsentirt wird.

Diese Frage wird beantwortet durch

II. die Fläche, welche die Tangente in y enthält, ist durch $f(x,y)I(x,y) - F(x,y)H(x,y) = 0$ dargestellt; die eine Schaar von Sehnen der Raumcurve, welche in ihr enthalten sind, ist, wie schon erwähnt, durch

$$\left.\begin{array}{l} \varkappa f(x,y) + \lambda F(x,y) = 0,\ \varkappa H(x,y) + \lambda I(x,y) = 0; \\ \text{die andere durch} \\ \varrho f(x,y) + \sigma H(x,y) = 0\quad \varrho F(x,y) + \sigma I(x,y) = 0 \end{array}\right\} \text{h)}$$

repräsentirt.

Dieses Letztere folgt auch aus der Bemerkung, dass $H(x,y) = 0$ $I(x,y) = 0$ eine Sehne der Raumcurve sein muss, und es bleibt, wenn eine oder beide der zu Grunde liegenden Flächen im Büschel $\varkappa f + \lambda F = 0$ geändert wird, wo dann die Formeln für $H_{f+\lambda F, F}$ und $I_{f, F+\lambda F}$ in Anwendung kommen (vergl. § 1 am Ende).

Wie man sieht, ist bei der doppelten in h) gegebenen Darstellung einer Raumcurvensehne stets die Kenntniss des

Berührungspunctes einer Tangente, welche mit der Sehne zusammen in derselben Fläche des Büschels liegt, vorausgesetzt.

Um die Tangenten, welche in einer bestimmten Fläche des Büschels $\varkappa f + \lambda F = 0$ liegen, zu ermitteln, dient der Satz:

III. In der Fläche $\varkappa f + \lambda F + 0$ sind 8 Tangenten der Raumcurve enthalten; ihre Berührungspuncte werden durch die Fläche $\varkappa H + \lambda I = 0$ ausgeschnitten.

Die Tangentialebene $\varkappa f(x,y) + \lambda F(x,y) = 0$ schneidet nämlich die Raumcurve ausser in y in 2 Puncten x und x^1, durch welche auch $\varkappa H(x,y) + \lambda I(x,y) = 0$ hindurchgeht. Fällt einer der Puncte x, x^1 auch noch mit y zusammen, dann muss $\varkappa H(x,y) + \lambda I(x,y) = 0$ durch y gehen, und die Fläche $\varkappa f(x) + \lambda F(x) = 0$ enthält dann die Tangente in y, wie leicht zu sehen ist. Dann ist $\varkappa H(y) + \lambda I(y) = 0$ und die Gleichung der die Tangente in y enthaltenden Fläche ist $I(y)\,f(x) - H(y)\,F(x) = 0$, was mit der in II. gegebenen Form vermöge g) in Einklang gebracht werden kann.

Wird umgekehrt $\varkappa : \lambda$ als bekannt angenommen, so liefert $\varkappa H(y) + \lambda I(y) = 0$ die Berührungspunkte der in $\varkappa f + \lambda F = 0$ enthaltenen Tangenten der Raumcurve und dies ist das Theorem III. Wir schliessen hieraus noch, dass die Schmiegungsebene in y durch $I(y)\,f(x,y) - H(y)F(x,y) = 0$ repräsentirt wird[1]).

Fällt nun von den oben genannten Puncten x und x^1 auch noch der 2te in y hinein, so wird die Schmiegungsebene Wendungsberührebene, y also Wendepunct der Raumcurve.

Die Ebene $\varkappa H(x,y) + \lambda I(x,y)$ geht dann bei gehöriger Bestimmung von $\varkappa : \lambda$ durch die Grade $f(x,y) = 0$ $F(x,y) = 0$ d. h. es verschwindet die Determinante

$$\begin{vmatrix} f_1(y) & f_2(y) & f_3(y) & f_4(y) \\ F_1(y) & F_2(y) & F_3(y) & F_4(y) \\ H_1(y) & H_2(y) & H_3(y) & H_4(y) \\ I_1(y) & I_2(y) & I_3(y) & I_4(y) \end{vmatrix}$$

und man hat also:

IV. Die 16 Wendepuncte der Raumcurve 4. Ordnung sind durch die Combinante $(aAHI)a_x A_x H_x I_x = 0$

[1]) Clebsch, Crelle 63. Ueber die Wendungsberührungsebenen ect.

ausgeschnitten. (Es ist dies die durch 4) § 1 definirte Form, welche die 4 Ebenen des Polartetraeders darstellt.)

Der hier gegebene Beweis dieses Satzes, gestützt auf die vorher entwickelten Principien, dürfte algebraisch der einfachste sein.

Dass die Fläche $\varkappa f + \lambda F = 0$, welche die Tangente in y enthält, für y als einen Wendepunct einer der im Büschel enthaltenen Kegel wird, ist unmittelbar klar; denn die Ebenen $\varkappa H(x,y) + \lambda I(x,y) = 0$ gehen alle durch eine solche Erzeugende der Fläche $I(y)\,f(x) - H(y)\,F(x) = 0$, welche mit der Tangente in y zu derselben Schaar gehört; andererseits giebt es in diesem Falle, wie oben erwähnt, eine Ebene $\varkappa H(x,y) + \lambda I(x,y) = 0$ welche die Tangente in y enthält, daher schneiden sich Erzeugende derselben Schaar und die Fläche $I(y)\,f(x) - H(y)\,F(x) = 0$ ist ein Kegel, es ist also, wenn $\varkappa_i : \lambda_i$ eine Wurzel $\Delta(\varkappa,\lambda) = 0$ ist (vergl. § 1. 3.), für 4 in ein und derselben Tetraederebene liegende Wendepuncte y zu gleicher Zeit $\frac{H(y)}{I(y)} = -\frac{\lambda_i}{\varkappa_i}$. Auch die weiteren geometrischen Eigenschaften der Wendepuncte werden hieraus mit Leichtigkeit erschlossen.

Zu den bekannten Eigenschaften der 4 durch eine Raumcurventangente zu legenden doppelt berührenden Tangentialebenen aber kommt man auf derselben Grundlage sehr einfach.

Nach Theorem I nämlich haben wir, um diejenigen Ebenen $\varkappa f(x,y) + \lambda F(x,y)$ zu finden, welche noch in einem weiteren Puncte berühren, nur die Bedingung zu bilden, damit

$$\varkappa f(x,y) + \lambda F(x,y) = 0 \quad \varkappa H(x,y) + \lambda I(x,y) = 0$$

irgend eine Fläche des Büschels berührt. Nehmen wir als solche $\rho f + \sigma F = 0$, wo ρ u. σ irgend welche Grössen bedeuten, so entsteht die Bedingung, indem man in $M = (abuv)^2$ setzt

für $a_{i\varkappa}$ $\rho_{i\varkappa} + \sigma A_{i\varkappa}$, für u_i $\varkappa f_i(y) + \lambda F_i(y)$

für v_i $\varkappa H_i(y) + \lambda I_i(y)$.

Dies kommt auf dasselbe hinaus, dass man setzt

für $a_{i\varkappa}$ $\varkappa a_{i\varkappa} + \lambda A_{i\varkappa}$, für u_i $\varkappa f_i(y) + \lambda F_i(y)$

für v_i $\rho H_i(y) + \sigma I_i(y)$.

Macht man nun zunächst die beiden ersten Substitutionen, so kommt $o = \big((abcv)(abdv)c_y d_y\big)_{x\lambda}$ wo $(x\lambda)$ andeutet, dass für a_{ix} $x a_{ix} + \lambda A_{ix}$ gesetzt sein soll. Da nun $(abcv)(abdv)c_y d_y$ nach dem Productsatz mit Berücksichtigung von $f(y)=o$, $F(y)=o$ sich als $= -\frac{1}{12} v_y^2 \Delta_f$ ergiebt, so lautet die erwähnte Bedingung

$$-\frac{1}{12}\big(\rho H(y) + \sigma I(y)\big)^2 \Delta(x,\lambda) = o \qquad i)$$

Der allein in Betracht kommende Factor $\Delta(x,\lambda) = o$ liefert nun den algebraischen Beweis des Resultates:

V. Die Parameter der 4 durch die Tangente in y gehenden Doppeltangentialebenen sind durch $\Delta(x,\lambda) = o$ gegeben, ihr Doppelverhältniss ist constant[1]), die Ebenen gehen durch die 4 Kegelspitzen des Büschels. (Cremona, Ober-Flächen pg. 220.)

Die Berührungspuncte dieser 4 Ebenen (wir werden ihre Gleichungen später aufstellen) nenne ich die 4 dem Puncte y correspondirenden Puncte. Die correspondirenden Puncte einer Raumcurve 4. Ordnung bilden also 4 getrennte Systeme, entsprechend den 4 Wurzeln von $\Delta(x,1) = o$, derart, dass die durch ein Paar correspondirender Puncte gehende Ebene die Raumcurve stets in einem weiteren Paar derselben Art schneidet, während es unmöglich ist, auf diese Weise in ein anderes System «correspondirender» Puncte hineinzukommen. Es liegt ferner die Frage nahe nach der Bestimmung der 4 durch eine Sehne der Raumcurve gehenden Tangentialebenen derselben Curve. Auch diese lassen sich mittelst der vorherigen Methoden algebraisch bestimmen.

Bemerken wir nur, dass die Gleichungen
$xf(x,y) + \lambda F(x,y) = o$, $xH(x,y) + \lambda I(x,y) = o$ $f(x) = o$, $F(x) = o$, eine vertauschbare Beziehung zwischen den Puncten x und y der Raumcurve festsetzen, die nämlich, dass x ein Schnittpunct der an $xf + \lambda F = o$ in y gelegten Tangentenebene mit der Raumcurve sei, oder, was dasselbe ist, dass die Sehne (xy) in

[1]) Die Constanz des Doppelverhältnisses gilt auch noch, wenn für die Tangente eine Sehne gesetzt wird.

der Fläche $\varkappa f + \lambda F = o$ enthalten sei; wir schliessen dann zunächst (was bemerkt zu werden verdient), dass, wenn (xy) eine Sehne der Raumcurve ist, durch y nicht nur die Polare von x in Bezug auf $\varkappa f + \lambda F = o$, sondern auch die Polare von x in Bezug auf $\varkappa H + \lambda I = o$ geht, (wo $\varkappa f + \lambda F = o$ die Sehne (xy) enthält) und dass dasselbe auch umgekehrt gilt. Die Puncte x und y stehen also in einem gewissen Reciprocitätsverhältnisse.

Hieraus erhält man nun auch die Bestimmung der Berührungspuncte der durch eine Sehne (x, x^1) an die Raumcurve gehenden Tangentialebenen. Soll nämlich die Verbindungslinie 2er Curvenpuncte x und x^1 die Tangente der Curve in y schneiden, so müssen sich der Punct y und die Grösse $\varkappa : \lambda$ so bestimmen lassen, dass man hat

$$\left.\begin{array}{l} \varkappa f(x,y) + \lambda F(x,y) = o \quad \varkappa f(x^1,y) + \lambda F(x^1y) = o \\ \varkappa H(x,y) + \lambda I(x,y) = o, \ \varkappa H(x^1,y) + \lambda I(x^1,y) = o \end{array}\right\}; \ k)$$

die Gleichungen $f(y) = o$ $F(y) = o$ sind dann von selbst erfüllt.

Die Elimination von y_i aus den obigen Gleichungen liefert eine Gleichung 4. Grades in $\varkappa : \lambda$, welche diejenigen Flächen $\varkappa f + \lambda F = o$ liefert, welche durch die Ebene (xx^1y) in y tangirt werden; für den speciellen Fall, dass x u. x^1 unendlich nahe rücken, wird diese Gleichung natürlich in $\Delta(\varkappa,\lambda) = o$[1]) übergehen. Die Coordinaten der gesuchten Berührungspuncte bestimmen sich aber sodann aus linearen Gleichungen $(\varkappa)$. Die wirkliche Ausrechnung der Determinante, welche die Gleichung 4. Grades in $\varkappa : \lambda$ liefert, so wie einige andere hierher gehörige auf derselben Grundlage beruhende definitive Darstellungen, welche wohl noch nicht gegeben worden sind, werde ich an einem anderen Orte beweisen. Ich bemerke noch, dass bei dieser Behandlungsweise gewisse überflüssige Factoren sich stets von selbst absondern, während sie anderweitig erst künstlich abgetrennt werden müssten. So werden zum Beispiel die Berührungspuncte der durch die Sehne (xy)

---

[1]) Ein sich dabei absondernder Factor erweist sich als $(aAHI)\ a_x A_x H_x I_x = T_x^4$.

oder (uv) (als Schnitt von Ebenen betrachtet) gehenden Tangentialebenen durch die Combinante $(aAuv)a_x A_x = o$ geliefert, wobei die Puncte x und y, jeder doppelt zählend, von der Gleichung der 8 Schnittpuncte der Flächen $(aAuv)a_x A_x = o$ $f(x) = o$ $F(x) = o$ abzusondern sind. Bei dem obigen Verfahren ist dies schon von selbst geschehen; nach Auflösung einer definitiv aufzustellenden Gleichung 4. Grades bestimmen sich die 4 restirenden Puncte, wie man sieht, einfach aus linearen Gleichungen.

Der einheitliche Gesichtspunct aber, von dem aus die vorhergehenden Resultate sich ableiten liessen, war in erster Linie die Identität g) und die aus g) gefolgerte Darstellung der Raumcurvensehne als Schnitt 2er Polaren eines Curvenpunctes in Bezug auf 2 covariante Flächen.

§ 3.

Darstellung der Coordinaten eines Punctes der Raumcurve 4. Ordnung als explicite Functionen eines Parameters λ.

Die definitive Ausdrucksform für die Coordinaten eines Curvenpunctes wird nach dem Vorhergehenden mit Zugrundelegung des Ebenenbüsches $\varkappa f(x,y) + \lambda F(x,y) = o$, wo y_i ein Punct der Curve ist, gewonnen. Man hat nämlich nur das variable Punctepaar, in welchem $\varkappa f(x,y) + \lambda F(x,y) = o$ die Raumcurve schneidet, in seine Bestandtheile aufzulösen.

Nun war die Verbindungsgrade dieses Punctepaares als Schnitt der Ebenen $\varkappa f(x,y) + \lambda F(x,y) = o$, $\varkappa H(x,y) + \lambda I(x,y) = o$ gegeben, und es kommt nur noch darauf an, die Schnittpuncte der genannten Graden mit irgend einer Fläche des Büschels: $\rho f + \sigma f = o$ zu ermitteln. Hier führen sich nun zunächst 2 ganz willkürliche Grössen ρ und σ ein, von deren Werth das Resultat nothwendig unabhängig ist. Indem wir aber über $\rho : \sigma$ noch angemessen verfügen, geben wir den sich ergebenden Ausdrücken eine ungemein einfache Form.

Soll überhaupt die Gleichung eines Schnittpunctes einer Graden $u_x = o$, $v_x = o$ mit der Fläche 2. Ordnung $c_x^2 = o$ ermittelt werden, so zerfälle man (mit ω_i variable Ebenencoordinaten bezeichnet) $(cuv\omega)^2 \equiv \omega_\xi \omega_\eta$ durch Identificirung; für die Schnittpunkte ξ_i und η_i ergeben sich dann nach einer Methode, ähnlich der von Clebsch und Gordan (Abel'sche Fct., pg. 70) gelegentlich gegebenen, die Ausdrücke

$$M\xi_i = (cuv)_i(cuv\gamma) + (uv\gamma)_i\sqrt{-\tfrac{1}{2}(cc^1uv)^2} \qquad a)$$

wo γ_i willkürliche Grössen sind, $M = \Sigma\eta_i\gamma_i$ aber ein Proportionalitätsfactor. Die η_i entstehen durch Aenderung des Vorzeichens des Radicales aus a).

Die Gleichung des einen oder andern Schnittpunctes wird sein

$$M\omega_{\xi,\eta} = (cuv\omega)(cuv\gamma) \pm (uv\gamma\omega)\sqrt{-\tfrac{1}{2}(cc^1uv)^2} \qquad b)$$

Für unseren Fall ist hierin zu setzen

für u_i $\quad \varkappa a_i a_y + \lambda A_i A_y$

für v_i $\quad \varkappa H_i H_y + \lambda I_i I_y$

für c_{ix} $\quad \rho a_{ix} + \sigma A_{ix}$

Zu Gunsten der Endform des Resultates gehe ich von der symbolischen Darstellung in b) zur Darstellung durch Determinanten über. Es wird dann

$$(cuv\omega)(cuv\gamma) = \Delta(\rho,\sigma) \begin{pmatrix} \varkappa f_i + \lambda F_i & \varkappa H_i + \lambda I_i & \omega_i \\ \varkappa f_i + \lambda F_i & \varkappa H_i + \lambda I_i & \gamma_i \end{pmatrix}$$

wo das vorgesetzte $\Delta(\rho,\sigma)$ bedeuten soll, dass $\Delta(\rho,\sigma)$ als Determinante

$$\Sigma \pm (\rho a_{11} + \sigma A_{11})(\rho a_{22} + \sigma A_{22})(\rho a_{33} + \lambda A_{33})(\rho a_{44} + \lambda A_{44})$$

oberhalb und unterhalb mit den in der Klammer stehenden Reihen gerändert sein soll.

Ferner wird, wie schon früher bemerkt wurde,

$$-\tfrac{1}{2}(cc^1uv)^2 \equiv \tfrac{1}{24}\Delta(\varkappa,\lambda)\left(\rho H(y) + \sigma I(y)\right)^2$$

dann hat man bereits als Darstellung eines Curvenpunctes

$$M\omega_{\xi,\eta} = \Delta(\rho,\sigma) \begin{pmatrix} \varkappa f_i + \lambda F_i, & \varkappa H_i + \lambda I_i & \omega_i \\ \varkappa f_i + \lambda F_i, & \varkappa H_i + \lambda I_i & \gamma_i \end{pmatrix}$$

$$c) \quad \pm \begin{vmatrix} \varkappa f_1 + \lambda F_1, & \varkappa f_2 + \lambda F_2, & \varkappa f_3 + \lambda F_3, & \varkappa f_4 + \lambda F_4 \\ \varkappa H_1 + \lambda I_1, & \varkappa H_2 + \lambda I_2, & \varkappa H_3 + \lambda I_3, & \varkappa H_4 + \lambda I_4 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{vmatrix} (\rho H + \sigma I) \sqrt{\frac{1}{24}\Delta(\varkappa,\lambda)}$$

und unter der Wurzel kommt die für die Raumcurve charakteristische Function $\Delta(\varkappa,\lambda)$ vor.

Aber dieser Ausdruck, der $\frac{\lambda}{\varkappa}$ im 4. Grade enthält, vereinfacht sich noch weiter, wenn man für $\rho : \sigma$ setzt $\varkappa : \lambda$ und für γ_i f_i oder auch F_i. Indem man in den auftretenden Determinanten immer eine Reihe zerstört, erhält man nach Absonderung von $\varkappa H + \lambda I$, welches in M eingehen möge, schliesslich folgende elegante Darstellung eines Punctes der Curve:

$$M\omega_\xi = \begin{vmatrix} \varkappa a_{11} + \lambda A_{11}, & \varkappa a_{12} + \lambda A_{12} & . & \varkappa a_{14} + \lambda A_{14} & \varkappa H_1 + \lambda I_1 & \omega_1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \varkappa a_{41} + \lambda A_{41}, & . & . & \varkappa a_{44} + \lambda A_{44} & \varkappa H_4 + \lambda I_4 & \omega_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & 0 & 0 \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\pm \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ \varkappa H_1 + \lambda I_1 & . & . & \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \end{vmatrix} \sqrt{\frac{1}{24}(\Delta(\varkappa,\lambda)} \qquad d)$$

und hierin tritt λ nur im 3. Grade auf, die Differentialquotienten aber sind stets mit den Coordinaten des willkürlichen Curvenpunctes y als Argumenten geschrieben gedacht. Das Resultat kann auch so ausgesprochen werden:

Die Coordinaten eines Punctes der Raum-

curve 4. Ordnung drücken sich auf folgende Weise aus:

$$M\xi_i = \varkappa^3 A_i + 3\varkappa^2\lambda B_i + 3\varkappa\lambda^2 C_i + \lambda^3 D_i \pm (\varkappa\alpha_i + \lambda\beta_i)\sqrt{\frac{1}{24}\Delta(\varkappa,\lambda)} \qquad e)$$

worin $\varkappa^3 A_i + 3\varkappa^2\lambda B_i + 3\varkappa\lambda^2 C_i + \lambda^3 D_i$ die Unterdeterminante von ω_i in der Determinante

$$\begin{vmatrix} \varkappa a_{11} + \lambda A_{11} & \varkappa a_{12} + \lambda A_{12} & . & . & \varkappa H_1 + \lambda I_1 & \omega_1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \varkappa a_{41} + \lambda A_{41}, & . & . & . & \varkappa H_4 + \lambda I_4 & \omega_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & 0 & 0 \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = D$$

$\varkappa\alpha_i + \lambda\beta_i$ aber die entsprechende Unterdeterminante in

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ \varkappa H_1 + \lambda I_1 & . & \varkappa H_4 + \lambda I_4 & \\ \omega_1 & . & \omega_1 & \end{vmatrix} = E$$

und $\Delta(\varkappa,\lambda)$ der bekannte Ausdruck 4. Grades ist.

Diese Ausdrücke liefern uns die Coordinaten des Curvenpunctes in einer für f und F symmetrischen Form, wobei noch auf das Auftreten der Covarianten H und I aufmerksam gemacht werden möge, welche auch hier eine ausgezeichnete Rolle spielen. Die Determinanten D und E sind leicht in symbolische Formen zu bringen, wobei ausser der Combination $\varkappa H + \lambda I$ auch noch die Coefficienten gewisser bilinearer Zwischenformen auftreten. Auf diese Ausführung wird hier verzichtet, zumal das Resultat in der Form d) oder e) dem analogen des H. Aronhold für die Curve 3. Ordnung in der Ebene gefundenen sehr ähnlich ist; wie man sofort erkennt, wenn man dessen erwähnte Arbeit (Seite 1) einsieht.

Die Formen D und E, aus denen sich die Gleichung des Curvenpunctes zusammensetzt, lassen eine einfache geometrische Deutung zu.

$E = o$ ist nämlich die Gleichung des Punctes, der auf der Tangente in y durch die Verbindungslinie der durch d) dargestellten Curvenpuncte ξ und η ausgeschnitten wird; $D = o$ natürlich der 4. harmonische Punct zu $E = o$, ξ und η.

Da $D = o$ in $k : \lambda$ vom 3. Grade ist, so kann man sagen, dass, wenn man auf allen eine feste Sehne oder Tangente der Raumcurve schneidenden Sehnen derselben zu deren Schnittpuncten mit der festen Tangente (oder Sehne) und den Schnittpunctepaaren mit der Raumcurve die 4. harmonischen Puncte sucht, alle diese letztgenannten Puncte auf einer Raumcurve 3. Ordnung[1]) liegen, deren Parameterdarstellung durch $D = o$ (Gleichung eines Punctes derselben) geliefert. Diese Raumcurve berührt die Curve 4. Ordnung in y und geht durch die zu y correspondirenden 4 Puncte (vergl. § 2 V.). Die Gleichungen der 4 dem Puncte y correspondirenden Puncte sind daher durch $D = o$ gegeben, sobald darin für $\varkappa : \lambda$ der Reihe nach die 4 Wurzeln $\varkappa_i : \lambda_i$ gesetzt werden.

Ich muss noch hinzusetzen, dass die Formeln d) ihre Gültigkeit verlieren, wenn $\frac{\varkappa}{\lambda} = \frac{-I(y)}{H(y)}$ gesetzt, in welchem Falle die Coordinatenwerthe sämmtlich identisch verschwinden. Dieser Fall ist geometrisch der, dass die Ebene $\varkappa f(x,y) + \lambda F(x,y) = o$ zur Schmiegungsebene in y wird, wo dann der Punct y 3fach als Schnittpunct auftritt und der 4. Schnittpunct noch übrig bleibt. Die Gleichung dieses 4. Schnittpunctes, eine Zwischenform erster Klasse 4. Ordnung, erfordert zu ihrer Auffindung entweder die Recursion auf Formel c) dieses Paragraphen, wo die Grössen $\rho : \sigma$, γ_i willkürlich gelassen sind, oder eine be-

[1]) Diese Raumcurve 3. Ordnung könnte man passend die Polare des Punctes y, in dem die feste Tangente gelegt ist, oder auch die Polare der Sehne (wenn diese an die Stelle der Tangente tritt) nennen. Sie zerfällt für eine Tangente in einem Wendepunct in eine Grade und einen Kegelschnitt.

sondere Untersuchung, welche uns auch die Parameterdarstellung hätte liefern können, aber für diese nicht so schnell und elegant zum Ziele geführt hätte, wie die vorher angegebenen Methoden. Anderen Ortes werde ich auf diese in Analogie zu der Theorie ebener Curven 3. Ordnung interessante Entwickelung zurückkommen[1]).

§ 4.

Das auf die Raumcurve 4. Ordnung bezügliche homogene Differential. Reduction des Differentiales auf die gewöhnliche Form. Summe der Differentiale für die Schnittpuncte aller auf derselben Büschelfläche $\rho f + \sigma F = 0$ liegenden Sehnen der Raumcurve. Ableitung des Satzes über die Summe der Differentiale (Integrale) für ein ebenes Schnittpunctsystem aus dem vorhergehenden Satze. Anwendung des elliptischen Differentiales auf ein geometrisches Problem im Raume, welches ein bekanntes ebenes Analogon hat.

Im Folgenden zeige ich eine Reduction des elliptischen Differentiales[2])

$$D_{(x)} = \frac{\Sigma \pm \xi_1 \eta_2 x_3 dx_4}{f(x,\xi) F(x,\xi) - F(x,\xi) f(x,\eta)} \qquad a)$$

worin $f(x) = 0$, $F(x) = 0$, und die ξ_i, η_i willkürliche Grössen darstellen, von deren Werthen der Werth von $D_{(x)}$ unabhängig ist. Die ξ_i und η_i können als Coordinaten 2er Puncte angesehen werden; es treten dann in $D_{(x)}$ nur die Coordinaten der Verbindungslinie $(\xi\eta)$ auf. Setzt man $(\xi\eta)_{ik} = (uv)_{lm}$, so nimmt das Differential auch die Form an

---

[1]) Noch grössere Schwierigkeiten macht die Herstellung der Gleichung der begleitenden Ebene einer Ebene u; d. h. derjenigen Ebene, auf welcher die 4 Puncte liegen, welche man erhält, wenn in den Schnittpuncten von u mit der Curve die Schmiegungsebenen gelegt werden.

[2]) Die symmetrische Form solcher Differentiale mit 4 Variablen gab Clebsch Crelle 63.

$$D(x) = \frac{\Sigma \pm \xi_1 \eta_2 x_3 dx_4}{(aAuv)a_x A_x} = \frac{u_x v_{dx} - u_x u_{dx}}{(aAuv)a_x A_x} \qquad b)$$

wo im Nenner eine Combinante auftritt. Die geometrische Bedeutung von $(aAuv)a_x A_x = o$ ist bekanntlich die, dass die für constante $(uv)_{ik}$ dadurch dargestellte Fläche die Berührungspuncte der (uv) schneidenden Curventangenten ausschneidet. (Dieselbe Fläche geht auch durch die 4 Ecken des Polartetraeders $T_x^4 = o$).

$D_{(x)}$ ist das einzige überall endliche Abelsche Integral, welches sich für die Raumcurve $f = o$ $F = o$ bilden lässt, die Raumcurve 4. Ordnung erster Art ist also vom Geschlechte $p = 1$.

Jedes andere für die Raumcurve zu bildende Differential hat aber die Form $\Delta_{(x)} = \frac{\Theta(x)}{H(x)} D(x)$ wo $\Theta(x)$ und $H(x)$ beide von derselben Ordnung sind. Dieses Integral wird unstetig für die Schnittpuncte von $H(x) = o$ $f(x) = o$ $F(x) = o$, vorausgesetzt, dass nicht $\Theta(x) = o$ durch einen oder mehrere derselben hindurchgeht. Geht $\Theta(x) = o$ durch alle Schnittpuncte von $H(x) = o$, so ist (unter der Voraussetzung $f(x) = o$ $F(x) = o$) $H(x)$ von $\Theta(x)$ nur um eine multiplicirende Constante verschieden und das Differential wiederum überall endlich.

Für dieses eben beschriebene allgemeine Differential liefert natürlich die § 3 gegebene Parameterdarstellung eine Methode, dasselbe auf eine Function einer einzigen unabhängigen Variablen λ zu reduciren. Hieraus allein schon geht hervor, dass alle Differentiale $\Delta_{(x)}$ nur die Irrationalität $\sqrt{\Delta(x,\lambda)}$ enthalten, folglich auf die Normaldifferentiale mit diesem Radical zurückkommen. Da ferner ein überall endliches Differential nach Vornahme der Substitutionen § 2 e) für die x_i offenbar auch wieder in ein solches übergeht[1]), so kann sich das

[1]) Clebsch und Gordan, Abelsche Functionen pg. 51.

Differential $D_{(x)}$ nur durch einen constanten Factor von $\frac{\varkappa d\lambda - \lambda d\varkappa}{\sqrt{\Delta(\varkappa,\lambda)}}$ unterscheiden.

Wir wollen indessen die Reduction des Differentials $D_{(x)}$ direct bewerkstelligen, wobei sich zugleich der genannte Factor als ein Zahlenfactor erweist.

Nimmt man nämlich in $D_{(x)}$ für die u_i und v_i resp. $f_i(z)$ und $F_i(z)$, wo z ein beliebiger Curvenpunct ist, so geht das Differential über in

$$D_{(x)} = \frac{a_x a_z \,.\, A_{dx} A_z - A_x A_z \, a_z a_{dx}}{(aAbB)\, a_x b_z A_x B_z} \qquad c)$$

Hier ist der Nenner die im § 1. 5) mit Γ bezeichnete ungrade Combinante, nur mit den $(xz)_{i\varkappa}$ statt der $(uv)_{i\varkappa}$. Man kann nun Γ^2 sehr einfach durch die Invarianten Δ_f, Θ u. s. w. und durch f(x) F(x), f(x,z), F(x,z), f(z), F(z) ausdrücken. Schreibt man Γ mit den (uv), also $\Gamma = (aAbB)(abuv)(ABuv)$, so drückt sich Γ^2 rational durch M, N, P (§ 1, 5) aus. Dieses wichtige Resultat ist an und für sich interessant, ich werde hier nur den Fall abhandeln, dass Γ in der ersten Form gegeben ist, und $f(x) = o$ $F(x) = o$, $f(z) = o$ $F(z) = o$ vorausgesetzt werden darf.

Lässt man Γ aus $\psi = (aAuv)a_x A_x$ entstehen, indem man für die u_i $f_i(z)$, die v_i $F_i(z)$ setzt, bildet also zunächst ψ^2, formt dieses fortgesetzt vermittelst des Productsatzes um; dann erhält man nach einigen symbolischen Rechnungen, wobei stets Glieder mit f(x) ect. weggelassen werden, und schliesslich auch noch für die u_i und v_i die Werthe eingesetzt sind:

Unter Voraussetzung von

$$f(x) = o \quad F(x) = o, \quad f(z) = o \quad F(z) = o$$

ist

$$\Gamma^2 = \big((aAbB)a_x b_z A_x B_z\big)^2 = \frac{1}{48}\Delta\big(A_x A_z\,;\; -a_x a_z\big) \qquad d)$$

Hieraus folgt sofort:

$$\int D_{(x)} = 4\sqrt{3}. \int \frac{x d\lambda - \lambda dx}{\sqrt{\Delta(x,\lambda)}} \quad \text{für} \quad \frac{x}{\lambda} = -\frac{f(x,z)}{F(x,z)} \qquad e)$$

denn es ist

$$-d\left(\frac{a_x a_z}{A_x A_z}\right) = \frac{1}{(A_x A_z)^2}\left\{a_x a_z \,.\, A_z A_{dx} - A_x A_z \,.\, a_x d_{dx}\right\}$$

$$\Gamma = \frac{1}{4\sqrt{3}}\sqrt{\Delta(A_x A_z ; -a_x a_z)}$$

woraus für $\frac{x}{\lambda} = -\frac{a_x a_z}{A_x A_z}$ der zu beweisende Satz e) folgt.

Dasselbe leistet auch die Substitution

$$\frac{x}{\lambda} = -\frac{H_x H_z}{I_x I_z} \qquad f)$$

In der That sind ja nach der Identität § 2 g) $\frac{f(x,z)}{F(x,z)}$ und $\frac{H(x,z)}{I(x,z)}$ für x und z als als Curvenpuncte stets vergleichbar, d. h. man hat $\frac{f(x,z)}{F(x,z)} = \frac{H(x,z)}{I(x,z)}$. Den willkürlichen Punct z kann man nun noch mit x coincidiren lassen, dann wird auch die Substitution

$$\frac{x}{\lambda} = -\frac{H(x)}{I(x)} \qquad g)$$

das Integral auf die Form

$$\int D_x = 4\sqrt{3} \int \frac{x d\lambda - \lambda dx}{\sqrt{\Delta(x,\lambda)}}$$

bringen.

Dies folgt auch aus einer schon von Salmon[1]) bewiesenen Formel, wonach das Quadrat von $T_x^4 = (aAHI)a_x A_x H_x I_x$ sich rational durch f, F, H, I (nach unserer Bezeichnung) ausdrückt.

---

[1]) Analytische Geom. d. R. Anhang über Covarianten und Invarianten von Flächen 2. Grades.

Setzt man wieder für den Fall des Differentiales $f(x) = o$ $F(x) = o$, so lautet die mit geeigneter Bestimmung von Zahlenfactoren entnommene Formel

$$\left(T_x^4\right)^2 = \frac{1}{48}\,\Delta\left(I(x);\ -\ H(x)\right) \qquad h)$$

also ähnlich wie d).

Das Differential $D_{(x)}$ aber lässt sich auf die Form bringen

$$D_{(x)} = \frac{H(x)\,dI(x) \ -\ I(x)\,dH(x)}{T_x^4} \qquad i)$$

aus welcher sofort ersichtlich ist, dass mit Zuhülfenahme von h) die Reduction vermöge $\frac{\varkappa}{\lambda} = -\frac{H(x)}{I(x)}$ erfolgt.

Die zuletzt gegebene Substitution entspricht einer von Brioschi[1]), die unter e) ausgeführte der Aronhold'schen[2]) für das auf Curven 3. Ordnung (cubische ternäre Formen) bezügliche Integral.

Andererseits kann man aber die Transformation des Differentiales von allgemeinerem Gesichtspuncte auffassen, insofern als man die Werthe des Differentiales für den Schnitt einer Ebene u mit der Raumcurve 4. Ordnung aufsucht, wobei sich also für $D_{(x)}$ eine Gleichung 4. Grades ergiebt, welche durch ihre Coefficienten (Functionen von u_i und den Differentialen du_i) die symmetrischen Functionen von den 4 Werthen liefert, welche $D_{(x)}$ in den Schnittpuncten von u annimmt. Der Coefficient von $D_{(x)}^3$ verschwindet natürlich, wie es auch sein muss. Wählt man dann die du_i so, dass 2 Schnittpuncte von u mit zweien von u + du zusammenfallen, dann erhält man eine rein quadratische Gleichung für $D_{(x)}$ und die Werthe der

---

[1]) Brioschi compt. rend. tom. LVI und Crelle 63.

[2]) Aronhold l. c.

Differentiale für die nicht festen Schnittpuncte sind gleich und entgegengesetzt. Dies stimmt auch mit der in e) gewonnenen Formel überein, welche sich so aussprechen lässt:

Dreht man eine Tangentialebene der Raumcurve in z unendlich wenig um die Tangente in z, so ist die Summe der Differentialwerthe $D_{(x)}$, genommen von den mit z nicht zusammenfallenden Schnittpuncten der ersten Tangentialebene mit der Curve bis zu den entsprechenden Schnittpuncten der unendlich wenig gedrehten stets gleich Null, und die Differentiale haben die Werthe $\pm 4\sqrt{3}\,\frac{\varkappa d\lambda - \lambda d\varkappa}{\sqrt{\Delta(\varkappa,\lambda)}}$, wenn $\varkappa a_z a_x + \lambda A_z A_x = 0$ die Tangentialebene ist. Da nun der Punct z ganz willkürlich ist, so kann man auch sagen, dass die Differentiale $D_{(x)}$ für die 2 Schnittpuncte einer Sehne der Raumcurve bis zu den Schnittpuncten der ihr unendlich nahen auf derselben Fläche des Büschels liegenden Sehne genommen stets entgegengesetzt gleich sind. Dieser Satz, unmittelbar ein Ausfluss der von uns vorher geleisteten algebraischen Transformation des Differentiales, soll nun zunächst zum Beweise des Satzes über die Summe der Differentiale in den 4 Schnittpuncten einer Ebene mit der Raumcurve, und sodann zu einigen weiteren Folgerungen benutzt werden, wobei eine weitere Fortführung der algebraischen vorhin angedeuteten Entwicklungen über das Differential vorbehalten bleibt.

Führen wir zunächst in die sub e) im § 3. geleistete Parameterdarstellung das Integral statt des Parameters $\lambda : \varkappa$ ein, indem wir setzen

$$\frac{1}{4\sqrt{3}} \int_{\alpha}^{x} D_{(x)} = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}} = u(x) \qquad k)$$

wobei $\varkappa = 1$ gesetzt ist; $\Delta(\varkappa,\lambda) = \Delta(\lambda)$, α einen beliebigen Curvenpunct, λ_0 der demselben entsprechende Parameter bedeutet.

Bezeichnet man ferner mit S(u) die eindeutige doppelt-

periodische Umkehrung des Integrales $u = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}}$ so nehmen die Ausdrücke in § 3 e) im Allgemeinen die Form an:

$$\xi_i = \varphi_i\left(S(u)\right) + \psi_i\left(S(u)\right) \frac{dS(u)}{du} \qquad l)$$

wobei φ_i, ψ_i rationale Functionen ersten und 3. Grades sind. Hinsichtlich der Perioden der Function S(u), welche ω und ω^1 sein mögen, ist zu bemerken, dass dieselben immer so gewählt werden können, dass man hat

$$\frac{c}{2} = \int_{\lambda_0}^{\lambda^1} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}}, \quad \frac{c}{2} + \frac{\omega}{2} = \int_{\lambda_0}^{\lambda^2} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}},$$

$$\frac{c}{2} + \frac{\omega + \omega^1}{2} = \int_{\lambda_0}^{\lambda^3} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}}, \quad \frac{c}{2} + \frac{\omega^1}{2} = \int_{\lambda_0}^{\lambda^4} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}} \qquad m)$$

wo c derjenige Werth ist, für den immer $S(c - u) = S(u)$[1]) und λ_i die Wurzeln von $\Delta(\lambda) = 0$ sind.

Durch die Parameterdarstellung e) in § 3 ist die Curve mit ihren reellen und complexen Elementen eindeutig auf die $\sqrt{\Delta(\lambda)}$ darstellende complexe Ebene, das Integral u(x) in das Integral $\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}}$ auf dieser Ebene auf dem entsprechenden Wege genommen, abgebildet. Bemerkt man, dass der bei dieser Abbildung zu Grunde gelegte Punct y oder z der Curve ein willkürlicher ist, und dass die Abbildung für jeden andern

[1]) Bekanntlich nimmt jede doppeltperiodische Function 2. Ordnung innerhalb ihres Periodenparallelograms jeden Werth 2mal für 2 Argumente mit constanter Summe an.

Punct ebenso vorgenommen werden kann, wobei sich höchstens mit Festhaltung des Punctes α die untere Grenze des Integrales

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}}$$ ändert, so kann man die in m) gegebenen Relationen so deuten:

Das Integral u(x), genommen zwischen 2 Puncten, welche demselben Puncte der Curve correspondiren, ist stets gleich einer halben Periode des allgemeinen Integrales u(x). Und weiter:

Wenn x und x^1 2 Puncte der Raumcurve bezeichnen, deren Verbindungslinie auf einer Fläche $\rho f + \sigma F = o$ des Büschels liegt, so ist stets

n_1) $u(x) + u(x^1) \equiv u_0$ [1]), wo u_0 nur von $\rho : \sigma$, nicht von x und x^1 abhängig ist. Dieser Satz gilt für die Sehnen der einen Schaar, welche auf $\rho f + \sigma F = o$ gelegen ist; für die der andern Schaar gilt

n_2) $u(y) + u(y^1) \equiv v_0$ wo hinsichtlich v_0 dasselbe gilt, wie von u_0. Aber durch Specialisirung beweist man leicht, dass $u_0 + v_0 = C$, wo C nicht mehr von $\rho : \sigma$ abhängt.

Schneide nun eine beliebige Ebene ω die Raumcurve in x, x^1, y, y^1, dann sind (xx^1), (yy^1) zwei sich schneidende Sehnen, die auf derselben Fläche des Büschels liegen; daher gilt nach n_1) n_2)

$$u(x) + u(x^1) \equiv u_0$$
$$u(y) + u(y^1) \equiv v_0$$

also

$$u(x) + u(x^1) + u(y) + u(y^1) \equiv u_0 + v_0 \equiv C \quad p)$$

wo C in nichts von der Lage der Schnittebene ω abhängt.

Die Constante C wird insbesondere Null, wenn für die

---

[1]) $\equiv$ bedeutet soviel als: abgesehen von ganzen Vielfachen der Perioden.

untere Grenze des Integrales ein Wendepunct gewählt wird; werden die u(x) in diesem Sinne verstanden, so gilt also:

$$u(x) + u(x^1) + u(y) + u(y^1) \equiv o$$

In den Formeln $n_1)$ und $n_2)$ wird aber $u_0 = -v_0$. —

Das Eigenthümliche dieser Betrachtungsweise ist, dass zunächst die Summe der Integrale für die Schnittpuncte einer beliebigen auf einer festen Fläche $\rho f + \sigma F = o$ gelegenen Sehne als der einen oder anderen von 2 Constanten gleich erwiesen wird, und dieser Satz zum Beweise des Abelschen Theorems benutzt wird. Ferner aber zeigt sich, dass nicht nur jeder Punct der Curve, sondern auch jede Fläche des Büschels durch ein Integral charakterisirt wird. Aus $n_1)$ und $n_2)$ wird nämlich unter den oben gemachten Voraussetzungen

$$u(x) + u(x^1) \equiv + u_0 \quad \text{(Sehnen der einen Schaar)}$$

$$u(y) + u(y^1) \equiv - u_0 \quad \text{(Sehnen der andern Schaar)}$$

und man findet für den Zusammenhang der die Fläche charakterisirenden Constanten u_0 mit dem Parameter $\rho : \sigma$ derselben

$$u_0 \equiv -\frac{c}{2} + \int_{\lambda_0}^{\rho} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}} \quad [\sigma = 1]$$

Ich nenne u_0 den Integralparameter, $\rho : \sigma$ den algebraischen Parameter der besagten Fläche.

Insbesondere findet man:

Die Bedingung, damit die Verbindungslinie 2er Puncte u_1, u_2 durch eine Spitze eines der 4 Kegel gehe, welche in dem Büschel enthalten sind, ist:

$$u_1 + u_2 = \begin{cases} 0 \\ \frac{\omega}{2} \\ \frac{\omega + \omega^1}{2} \\ \frac{\omega^1}{2} \end{cases} \qquad q);$$

die Bedingung, damit die Verbindungslinie 2er Puncte u_1, u_2 die Verbindungslinie 2er Kegelspitzen schneide, ohne durch eine der letzteren selbst zu gehen, ist

$$u_1 - u_2 = \begin{cases} \frac{\omega}{2} \\ \frac{\omega^1}{2} \\ \frac{\omega + \omega^1}{2} \end{cases} \qquad r)$$

Schneidet eine Sehne die Verbindungslinie 2er Kegelspitzen, so schneidet sie auch die Verbindungslinie der beiden andern.

Diese Sätze erweitern für Raumcurven 4. Ordnung den Kreis der nach Clebsch mittelst des Abel'schen Theorems lösbaren Probleme in bemerkenswerther Weise, indem sie eine Anzahl interessanter Beziehungen zwischen Curvenpuncten in elliptischen Functionen ausdrückt. Als Beweis von der Ausgiebigkeit der Formeln n_1), n_2), q) r) will ich die völlige Lösung einer Aufgabe mittheilen, die im Raume derjenigen in der Ebene für die einem Kegelschnitte einbeschriebenen, einem anderen umschriebenen Polygone[1]) entspricht.

Es soll ein Polygon von der Seitenzahl 2n construirt werden, dessen Ecken auf der Raumcurve, dessen Seiten in der Fläche $\rho f + \sigma F = o$ liegen. Wenn ist ein solches Polygon möglich, und wie sind alsdann die Werthe $\rho : \sigma$ beschaffen?

Es giebt eine begrenzte Anzahl von Flächen $\rho f + \sigma F = o$, auf denen sich solche Polygone herstellen lassen (und dann in unendlicher Anzahl, indem mit jedem beliebigen Puncte begonnen werden kann), ihre Integralparameter sind gegeben durch

$$u_0 \equiv \frac{m\omega + p\omega^1}{2n}$$

[1]) Vergl. Rosanes und Pasch Crelle 64. Auch die Abhandlung von Clebsch über die Steiner'schen Polygone ect. Crelle 63.

wo m und p mit n keinen Theiler gemein haben[1]), ihre Parameter $\rho : \sigma$ also sind durch

$$\frac{\rho}{\sigma} = S\left(\frac{c}{2} + \frac{m\omega + p\omega^1}{2n}\right)$$

bestimmt.

Für diese Polygone gelten folgende Sätze:

I. Ist die Seitenzahl 2n, und n eine ungrade Zahl, so gehen die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken eines solchen Polygones (seine Hauptdiagonalen) durch ein und denselben Punct; dieser Punct ist eine Kegelspitze des Büschels, und bleibt fest, wenn das Polygon sich so dreht, dass seine Ecken auf der Raumcurve, seine Seiten auf derselben Büschelfläche bleiben. Die Tangenten der Raumcurve in gegenüberliegenden Eckpuncten schneiden sich in der gegenüberliegenden Ebene des gemeinschaftlichen sich selbst cagugirten Tetraeders, bei der Bewegung des Polygons beschreiben die Schnittpuncte derselben eine Curve 4. Ordnung mit 3 Doppelpuncten, die Doppelcurve der von den Tangenten der Raumcurve erzeugten abwickelbaren Fläche[2]).

II. Ist die Seitenzahl eines solchen Polygones $= 2n$ und n eine gerade Zahl, so werden die Hauptdiagonalen nicht mehr durch einen festen Punct gehen, dagegen sämmtlich von ein und derselben Verbindungslinie 2er Kegelspitzen geschnitten werden, somit auch nach r) von der Verbindungslinie der beiden anderen Kegelspitzen. Auch diese Beziehung bleibt bei Drehung des Polygons ungeändert.

III. Sucht man zu allen Puncten eines derartigen Polygones die correspondirenden Puncte einer bestimmten Art (in dem § 2 V. angegebenen Sinne), so entsteht ein Polygon derselben Natur; und zwar geht, wenn n ungrade ist, das Polygon in sich selbst über; wenn n grade ist dagegen in ein anderes Polygon, dessen Seiten auf derselben Fläche liegen.

Die Beweise des Vorhergehenden lassen sich aus den Formeln q) und r) dieses § hervorgehend unmittelbar ersehen.

---

[1]) Wenn wir einfach geschlossene Polygone nur zulassen.

[2]) Bekanntlich hat diese Fläche in jeder Tetraederebene eine Doppelcurve 4. Ordnung $p = o$ mit 3 Doppelpuncten in 3 Kegelspitzen.

Wir wollen bemerken, dass durch Projection von einer Kegelspitze aus die besagten Sätze in die Poncelet'schen Sätze von den einem Kegelschnitte einbeschriebenen, einem anderen umschriebenen Polygonen übergehen, denen sie im Uebrigen entsprechen. Die gemeinsame Quelle, aus der diese und ähnliche Sätze gefolgert werden können, ist die directe Verknüpfung des auf die Raumcurve bezüglichen Integrales mit den der Curve eigenthümlichen Elementen durch definitive algebraische Darstellung, ein Umstand, auf welchen hier vorzugsweise Werth gelegt worden ist.

Thesen.

I. Die moderne Algebra hat sich nicht in dem Masse für die Geometrie fruchtbar bewiesen, als man es von ihr erwartet hat.

II. Bei einer ersten Einführung in die Theorie der elliptischen Functionen dürfte der ältere (historische) Weg dem auf neueren Grundlagen beruhenden immerhin vorzuziehen sein.

III. Zu einer umfassenden Theorie der höheren algebraischen Raumcurven wird man zunächst einer genauen Classification derselben bedürfen.

Lebenslauf.

Ich, Gustav Westphal, bin geboren den 4. Juli 1856 zu Wang im Riesengebirge, und bin der älteste Sohn des evangelischen Geistlichen Westphal in Senitz, Kreis Nimptsch. Von meinem Vater vorbereitet, bezog ich Ostern 1869 das Elisabetgymnasium in Breslau, und verliess diese Anstalt nach $3\frac{1}{2}$ Jahren mit dem Zeugnisse der Reife. Schon während meiner Gymnasialzeit durch den Unterricht des H. Prorector Professor Dr. *Kambly* zu mathematischen Studien angeregt, wurde ich Michaelis 1872 an der Universität Breslau immatriculirt und hörte 8 Semester hindurch hauptsächlich mathematische und physicalische, auch naturwissenschaftliche und philosophische Vorlesungen bei den Herren *Bachmann, Dorn, Dilthey, Cohn, Roemer, Meyer, Schroeter, Rosanes* und nahm während mehrerer Semester an den Uebungen des von den H. Professoren *Schroeter* und *Meyer* geleiteten Seminares, sowie an den mathematischen Uebungen des H. Prof. *Rosanes* Theil.

Allen Herren, deren Schüler zu sein mir vergönnt war, spreche ich hiermit meinen aufrichtigsten Dank aus, besonders aber den Herren *Schroeter, Meyer, Rosanes*, deren persönlicher Anleitung ich mich vielfach zu erfreuen hatte. Auch muss ich noch erwähnen, dass die vorliegende Abhandlung den freundlichen Rathschlägen des H. Prof. *Rosanes* ihre Entstehung verdankt.